

Angewandte Mathematik

Das Rucksackproblem: dynamische Programmierung

Christian Höfert

Fakultät Technik
Hochschule Reutlingen

SoSe 2023



Rucksackproblem - Dynamische Programmierung

Grundidee

Iterativ wird eine Tabelle (\rightarrow dynamische Programmierung) aufgebaut. Dabei wird in jedem Schritt ein neues Objekt zur Tabelle hinzugefügt.

Beginnend mit einer leeren Tabelle, werden aus den optimalen Teillösungen für das i -te Objekt optimale Teillösungen für das $i + 1$ -te Objekt konstruiert. Solange bis alle Objekte betrachtet wurden.

Rucksackproblem - Dynamische Programmierung

Grundidee

Iterativ wird eine Tabelle (\rightarrow dynamische Programmierung) aufgebaut. Dabei wird in jedem Schritt ein neues Objekt zur Tabelle hinzugefügt.

Beginnend mit einer leeren Tabelle, werden aus den optimalen Teillösungen für das i -te Objekt optimale Teillösungen für das $i + 1$ -te Objekt konstruiert. Solange bis alle Objekte betrachtet wurden.

Aufbau der Tabelle

- Die Tabelle besteht aus w_{\max} bzw. $w_{\max} + 1$ Spalten. Die j -te Spalte steht dabei für einen Rucksack mit maximaler Tragkraft j .
- Jede Zeile gehört zu einem Objekt.
- Der Einträge $v_{i,j}$ der Tabelle steht für den besten Wert Nutzen den ein Rucksack mit Tragkraft j bis zum i -ten Objekt besitzen kann.
- Am Ende der Tabelle, d.h. bei $v_{n,w_{\max}}$ steht der maximal erreichbare Nutzen v_{\max}

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Dynamische Programmierung - initiale Tabelle

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Es stehen also 12 Rucksäcke zur Verfügung mit der maximalen Tragkraft 0 bis 11. Zu Beginn sind alle Rucksäcke leer und haben damit den Nutzen 0.

Erstes Element hinzufügen

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7												

Erstes Element hinzufügen

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7

Da das erste Objekt ein Gewicht von 4 besitzt, passt es nicht in die Spalten 0 bis 3. Ab Spalte 4 kann es hinzugefügt werden.

Die Rucksäcke 4 bis 11 beinhalten also (virtuell) das erste Objekt und haben damit jeweils einen Nutzen von 7.

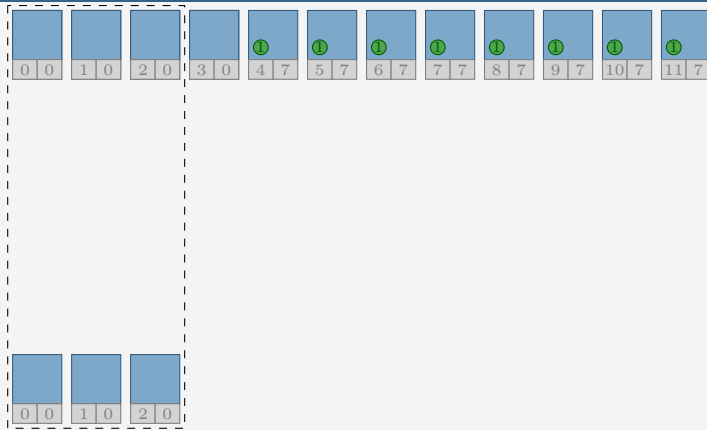
Optimale Rucksäcke nach Objekt $i = 1$

				①	①	①	①	①	①	①	①
0 0	1 0	2 0	3 0	4 7	5 7	6 7	7 7	8 7	9 7	10 7	11 7

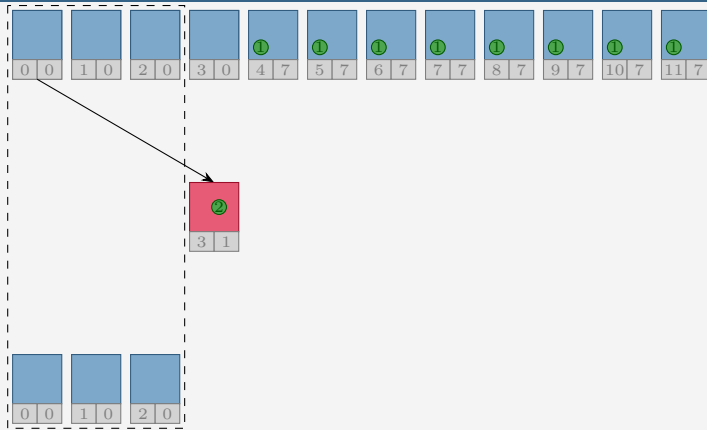
Was passiert beim Hinzufügen von Objekt 2 ($w_2 = 3, v_2 = 1$)?

				①	①	①	①	①	①	①	①
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7

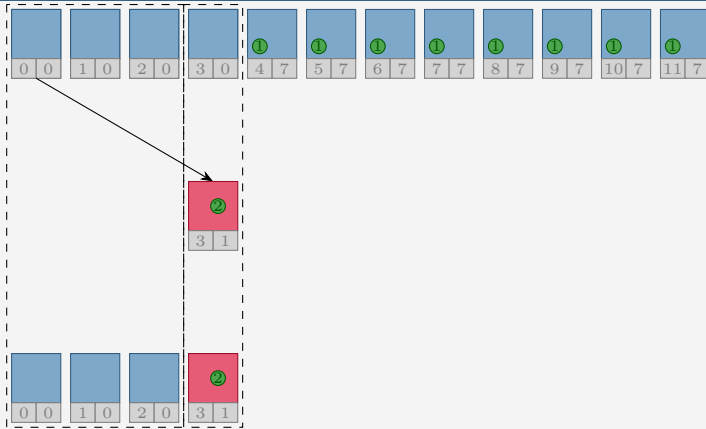
Was passiert beim Hinzufügen von Objekt 2 ($w_2 = 3, v_2 = 1$)?



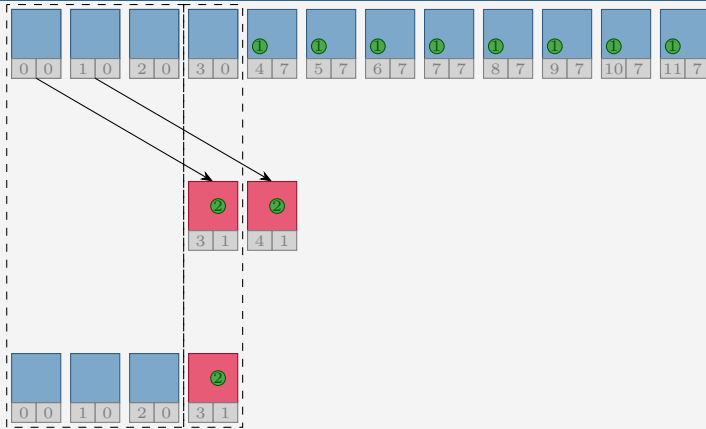
Was passiert beim Hinzufügen von Objekt 2 ($w_2 = 3, v_2 = 1$)?



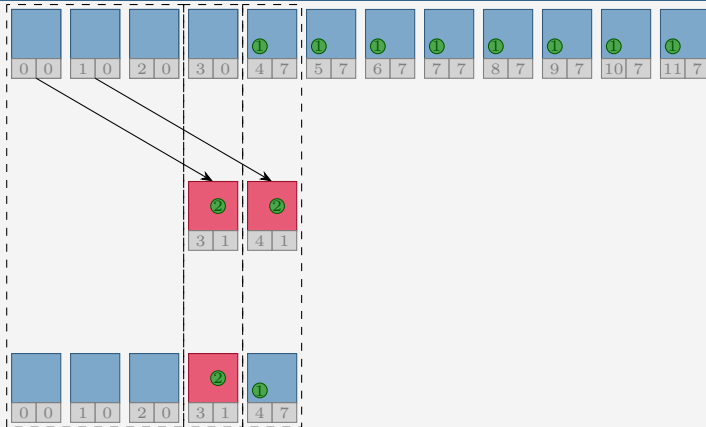
Was passiert beim Hinzufügen von Objekt 2 ($w_2 = 3, v_2 = 1$)?



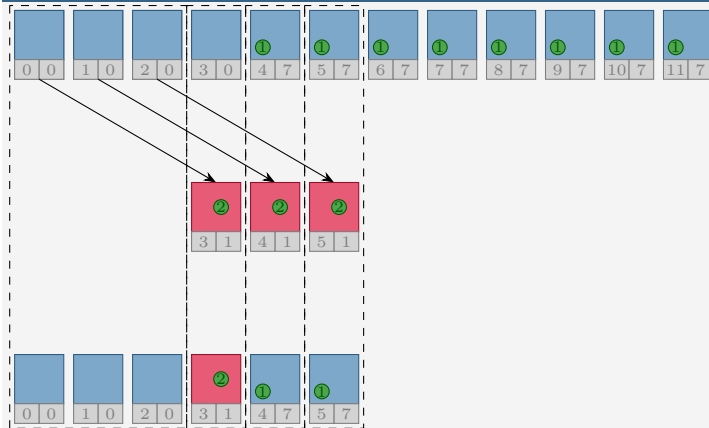
Was passiert beim Hinzufügen von Objekt 2 ($w_2 = 3, v_2 = 1$)?



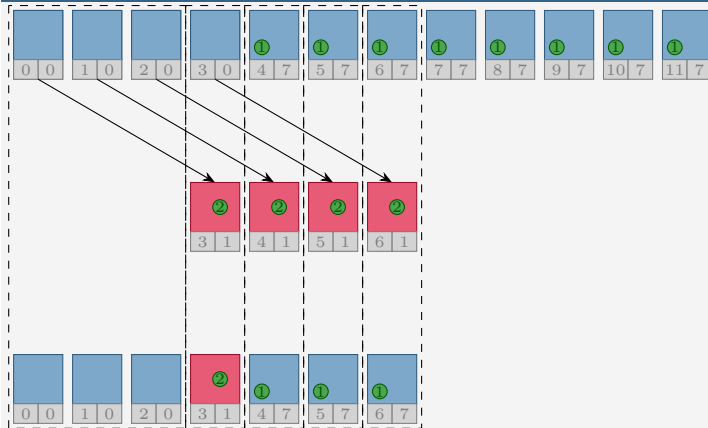
Was passiert beim Hinzufügen von Objekt 2 ($w_2 = 3, v_2 = 1$)?



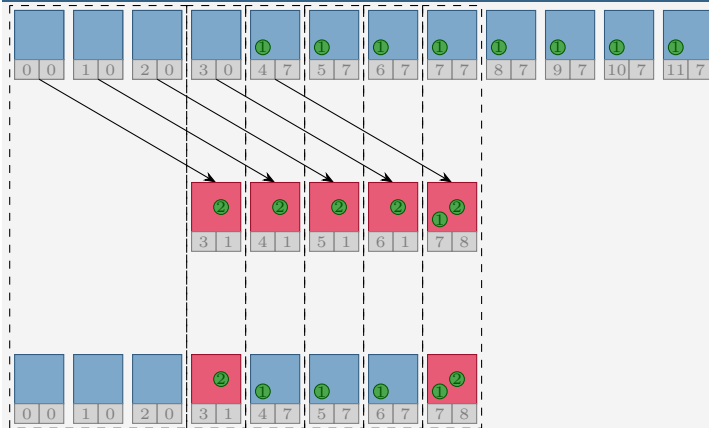
Was passiert beim Hinzufügen von Objekt 2 ($w_2 = 3, v_2 = 1$)?



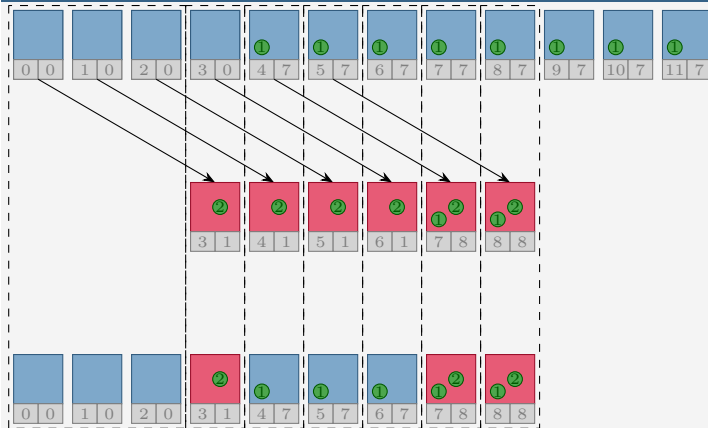
Was passiert beim Hinzufügen von Objekt 2 ($w_2 = 3, v_2 = 1$)?



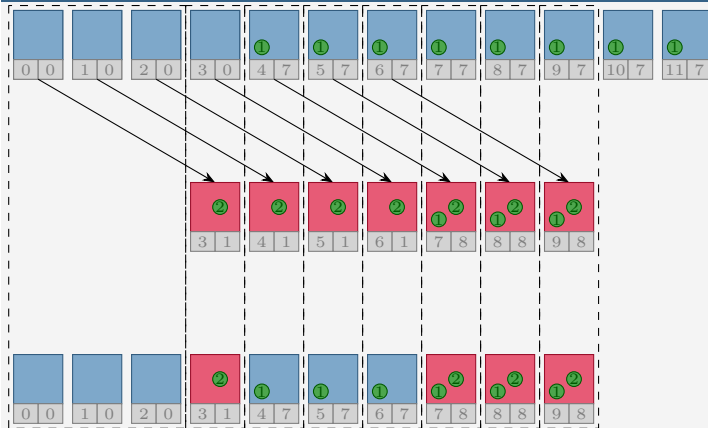
Was passiert beim Hinzufügen von Objekt 2 ($w_2 = 3, v_2 = 1$)?



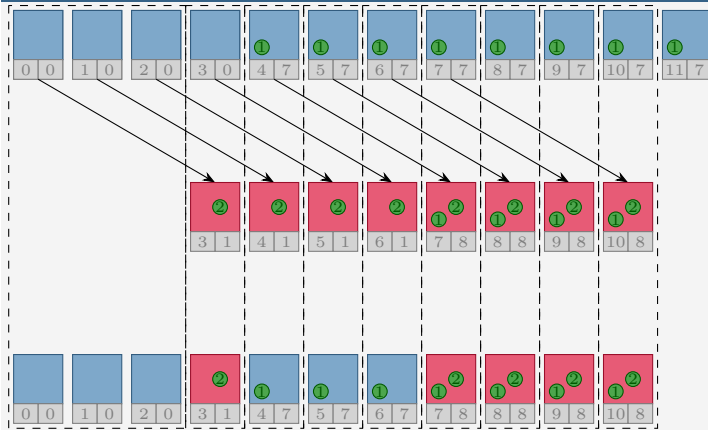
Was passiert beim Hinzufügen von Objekt 2 ($w_2 = 3, v_2 = 1$)?



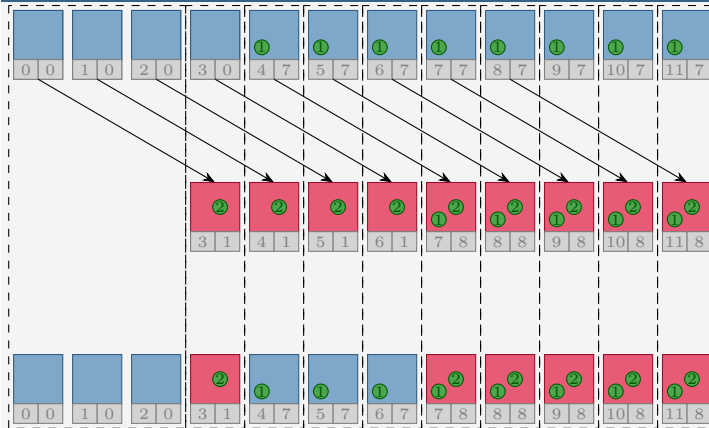
Was passiert beim Hinzufügen von Objekt 2 ($w_2 = 3, v_2 = 1$)?



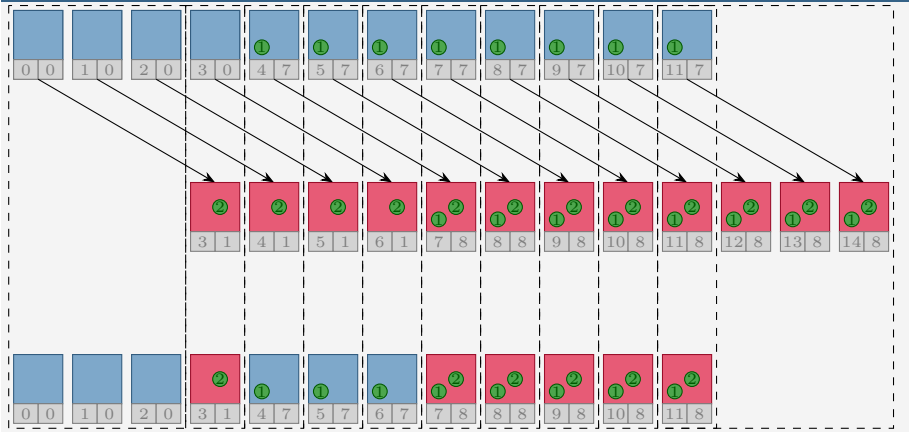
Was passiert beim Hinzufügen von Objekt 2 ($w_2 = 3, v_2 = 1$)?



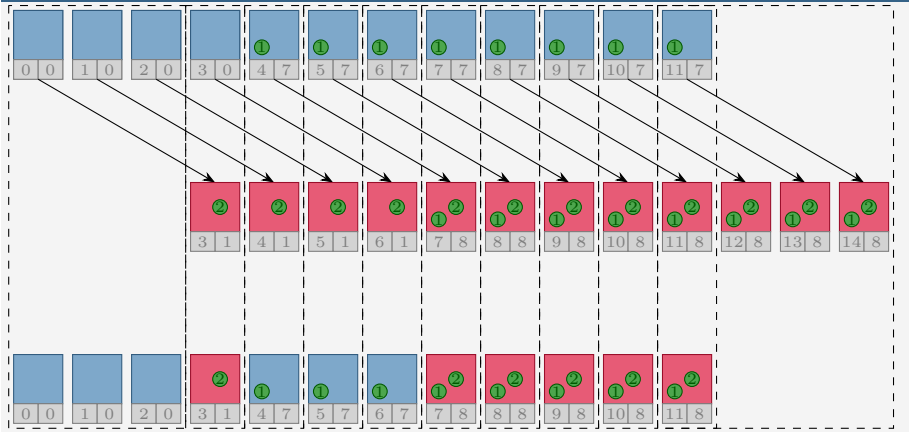
Was passiert beim Hinzufügen von Objekt 2 ($w_2 = 3, v_2 = 1$)?



Was passiert beim Hinzufügen von Objekt 2 ($w_2 = 3, v_2 = 1$)?



Was passiert beim Hinzufügen von Objekt 2 ($w_2 = 3, v_2 = 1$)?



Neue optimale Rucksäcke



Optimale Rucksäcke nach Objekt $i = 2$

			2	1	1	1	1 2	1 2	1 2	1 2	1 2
0 0	1 0	2 0	3 1	4 7	5 7	6 7	7 8	8 8	9 8	10 8	11 8

Tabelle nach $i = 2$

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8

Hinweis

In der Tabelle werden die konkreten Inhalte der Rucksäcke nicht gespeichert. Diese können am Ende durch 'Rückwärtslesen' wieder aus der Tabelle bestimmt werden.

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Hinzufügen der weiteren Elemente

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9												

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Hinzufügen der weiteren Elemente

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9						9	9	9	10	16	16	16

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Hinzufügen der weiteren Elemente

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
								9	9	9	10	16	16	16
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Hinzufügen der weiteren Elemente

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Hinzufügen der weiteren Elemente

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5			5	5	5	6	12	14	14	14	15	21

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Hinzufügen der weiteren Elemente

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
					5	5	5	6	12	14	14	14	15	21
4	2	5	0	0	5	5	7	9	12	14	14	16	16	21

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Hinzufügen der weiteren Elemente

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5	0	0	5	5	7	9	12	14	14	16	16	21

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Hinzufügen der weiteren Elemente

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5	0	0	5	5	7	9	12	14	14	16	16	21
5	4	8					8	8	13	13	15	17	20	22

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Hinzufügen der weiteren Elemente

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5	0	0	5	5	7	9	12	14	14	16	16	21
							8	8	13	13	15	17	20	22
5	4	8	0	0	5	5	8	9	13	14	15	17	20	22

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Hinzufügen der weiteren Elemente

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5	0	0	5	5	7	9	12	14	14	16	16	21
5	4	8	0	0	5	5	8	9	13	14	15	17	20	22

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Hinzufügen der weiteren Elemente

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5	0	0	5	5	7	9	12	14	14	16	16	21
5	4	8	0	0	5	5	8	9	13	14	15	17	20	22
6	3	6				6	6	11	11	14	15	19	20	21

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Hinzufügen der weiteren Elemente

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5	0	0	5	5	7	9	12	14	14	16	16	21
5	4	8	0	0	5	5	8	9	13	14	15	17	20	22
						6	6	11	11	14	15	19	20	21
6	3	6	0	0	5	6	8	11	13	14	15	19	20	22

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Hinzufügen der weiteren Elemente

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5	0	0	5	5	7	9	12	14	14	16	16	21
5	4	8	0	0	5	5	8	9	13	14	15	17	20	22
6	3	6	0	0	5	6	8	11	13	14	15	19	20	22

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Bestimmen der optimalen Packung

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5	0	0	5	5	7	9	12	14	14	16	16	21
5	4	8	0	0	5	5	8	9	13	14	15	17	20	22
6	3	6	0	0	5	6	8	11	13	14	15	19	20	22

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Bestimmen der optimalen Packung

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5	0	0	5	5	7	9	12	14	14	16	16	21
5	4	8	0	0	5	5	8	9	13	14	15	17	20	22
6	3	6	0	0	5	6	8	11	13	14	15	19	20	22

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Bestimmen der optimalen Packung

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5	0	0	5	5	7	9	12	14	14	16	16	21
5	4	8	0	0	5	5	8	9	13	14	15	17	20	22
6	3	6	0	0	5	6	8	11	13	14	15	19	20	22

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Bestimmen der optimalen Packung

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5	0	0	5	5	7	9	12	14	14	16	16	21
5	4	8	0	0	5	5	8	9	13	14	15	17	20	22
6	3	6	0	0	5	6	8	11	13	14	15	19	20	22

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Bestimmen der optimalen Packung

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5	0	0	5	5	7	9	12	14	14	16	16	21
5	4	8	0	0	5	5	8	9	13	14	15	17	20	22
6	3	6	0	0	5	6	8	11	13	14	15	19	20	22

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Bestimmen der optimalen Packung

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5	0	0	5	5	7	9	-12	-14	14	16	16	21
5	4	8	0	0	5	5	8	9	13	14	-15	-17	-20	22
6	3	6	0	0	5	6	8	11	13	14	15	19	20	22

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Bestimmen der optimalen Packung

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5	0	0	5	5	7	9	-12	-14	14	16	16	21
5	4	8	0	0	5	5	8	9	13	14	15	17	20	22
6	3	6	0	0	5	6	8	11	13	14	15	19	20	22

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Bestimmen der optimalen Packung

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	7	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5	0	0	5	5	7	9	12	14	14	16	16	21
5	4	8	0	0	5	5	8	9	13	14	15	17	20	22
6	3	6	0	0	5	6	8	11	13	14	15	19	20	22

Beispiel

Gesucht ist die optimale Packung eines Rucksacks mit $w_{\max} = 11$ kg. Dabei stehen die folgenden Objekte zur Verfügung

i	1	2	3	4	5	6
w_i	4	3	5	2	4	3
v_i	7	1	9	5	8	6

Bestimmen der optimalen Packung

i	w_i	v_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	7	0	7	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7
2	3	1	0	0	0	1	7	7	7	8	8	8	8	8
3	5	9	0	0	0	1	7	9	9	9	10	16	16	16
4	2	5	0	0	5	5	7	9	12	14	14	16	16	21
5	4	8	0	0	5	5	8	9	13	14	15	17	20	22
6	3	6	0	0	5	6	8	11	13	14	15	19	20	22

Optimale Packung

$$P_{\text{best}} = \{3, 4, 5\} \quad \text{mit} \quad v_{\max} = 22 \quad \text{und} \quad w = 11 \text{ kg}$$